Internationales Studienkolleg der Hochschule Kaiserslautern

Semester: Sommersemester 2023

FSP-Teilprüfung: Mathematik T2

Datum: 06.06.2023

Dauer: 90 Minuten

Prüfer: Dr. Jens Siebel, StD. Werner Müller, Jörg Wilhelm

Aufgabe 1 (StD. Müller)

Hinweis: Rechnen Sie, falls erforderlich, auf jeweils drei Nachkommastellen genau!

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 2 - i$ und $z_2 = 3 + i$.

a) Berechnen Sie jeweils in kartesischer Form:

- a1) $z_1 - z_2$ *(1 Punkt)*,
- a2) $z_1 \cdot z_2$ *(1 Punkt)*,
- a3) $\overline{z_2}$ *(1 Punkt)*,
- a4) $\frac{z_1}{z_2}$ *(1 Punkt)*,
- a5) z_1^2 *(1 Punkt)*.

b) Wandeln Sie z_1 in die Exponentialform um *(2 Punkte)*.

c) Bestimmen Sie alle Lösungen w von $w^3 = z_2$ *(3 Punkte)*.

Aufgabe 2 (Dr. Siebel)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem $f''(x) - f(x) = x,\ f(0) = 1,\ f'(0) = 0$ *(5 Punkte)*.

b) Bestimmen Sie den Ansatz $f_p(x)$ von $f^{(4)}(x) - f(x) = e^x$ *(3 Punkte)*.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $f'''(x) - f''(x) = 0$ *(2 Punkte)*.

FSP-Teilprüfung: Mathematik «Kurs», Sommersemester 2023, 06.06.2023

Aufgabe 3 (Dr. Siebel)

Kreuzen Sie jeweils das Feld ☐ mit der einzigen richtigen Alternative an *(10 Punkte)*.

richtige Antwort: 1 Punkt   falsche bzw. fehlende Antwort: 0 Punkte

a)	$z \cdot \bar{z} =$			
/1	$\lvert z\rvert^2$ ☐	$\lvert z\rvert$ ☐	1 ☐	0 ☐
b)	$\int_1^e \ln(x) \cdot \frac{1}{x}\,dx =$			
/1	1 ☐	$-0,5$ ☐	$0,5$ ☐	-1 ☐
c)	$\vec{a} \times \vec{a} =$			
/1	$\vec{a}$ ☐	$\vec{0}$ ☐	$\lvert\vec{a}\rvert^2$ ☐	$2 \cdot \vec{a}$ ☐
d)	Welche der Differenzialgleichungen hier ist linear?			
/1	$f''(x) - \sqrt{f'(x)} = 0$ ☐	$f'(x) - \left[f(x)\right]^2 = 0$ ☐	$f''(x) + \ln(x) \cdot f'(x) = x$ ☐	keine ☐
e)	$A = \begin{pmatrix} t^2 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ hat keine Inverse für:			
/1	$t = 2$ ☐	$t = 0$ ☐	$t = 1$ ☐	$t = 4$ ☐
f)	Für welche Funktion gilt beim Newtonverfahren $x_1 = 1 + x_0$?			
/1	$f(x) = x$ ☐	$f(x) = e^x$ ☐	$f(x) = -x$ ☐	$f(x) = e^{-x}$ ☐
g)	$f(x) = \sin(x + \pi)$			
/1	$= -\sin(-x)$ ☐	$= -\sin(x)$ ☐	$= \cos(x)$ ☐	$= -\cos(x)$ ☐
h)	Wie viele Normaleneinheitsvektoren hat $\varepsilon:\ x - y + 2 \cdot z = 1$?			
/1	0 ☐	1 ☐	2 ☐	unendlich viele ☐
i)	Welche Funktion hat keine reelle Polstelle?			
/1	$f(x) = \frac{x^2 - 1}{1 + x}$ ☐	$f(x) = \frac{x - 1}{x}$ ☐	$f(x) = \frac{x - 1}{1 + x}$ ☐	$f(x) = \frac{1 - x}{1 - x^2}$ ☐
j)	$L = \{x = 1, y = 1\}$ ist die Lösungsmenge von welchem LGS?			
/1	$\left(\begin{array}{cc\|c} e & e^2 & 1 \\ 1 & e & e \end{array}\right)$ ☐	$\left(\begin{array}{cc\|c} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$ ☐	$\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & e & 2 \cdot e \end{array}\right)$ ☐	$\left(\begin{array}{cc\|c} e & e & 2 \cdot e \\ 0 & e & e \end{array}\right)$ ☐
Summe: /10				

Aufgabe 4 (Wilhelm)

a) Prüfen Sie, ob folgende Funktion an der Stelle $x_0 = 1$ stetig ist:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & x > 1 \\ \sqrt{1-x^2} & -1 \le x \le 1 \end{cases} \qquad \mathbb{D}_f = [-1, \infty[$$ *(2 Punkte).*

b) Ermitteln Sie für $f(x) = \ln(x^2) - 3 \quad D_f \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$ die Tangentengleichung an der Stelle $x_0 = e$ *(3 Punkte)*.

c) Bestimmen Sie alle reellen und nicht-reellen Nullstellen von $f(x) = x^4 - x^3 + 4 \cdot x^2 - 4 \cdot x \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{C}$ *(3 Punkte)*.

d) Bestimmen Sie jeweils $f'(x)$:

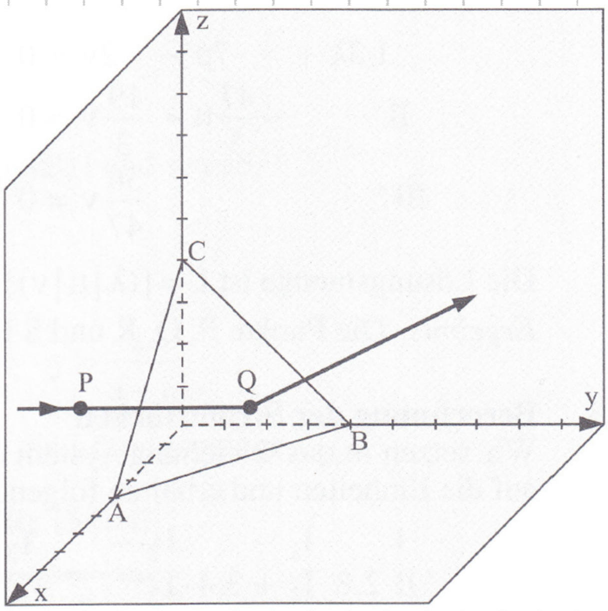
d1) $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-x^2} \quad \mathbb{D}_f = [0, \infty[$ *(1 Punkt),*

d2) $f(x) = \dfrac{-2 \cdot x + 5}{\sin(1-x)} \quad \mathbb{D}_f = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 1 - k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\}$ *(1 Punkt)*.

Aufgabe 5 (Wilhelm)

Im kartesischen Koordinatensystem befindet sich ein Spiegel in Form eines gleichseitigen Dreiecks ABC. Seine Lage ist durch die Ebenengleichung $\varepsilon : x + y + z = 4$ beschrieben.

Ein Lichtstrahl verläuft durch den Punkt $P(8|1|4)$ in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und trifft den dreieckigen Spiegel ABC im Punkt Q.



a) Geben Sie die Koordinatenform der x-z-Ebene an, und prüfen Sie ob der Punkt P in dieser Ebene liegt *(2 Punkte)*.

b) Geben Sie die Geradengleichung des Lichtstrahls durch den Punkt P in der Parameterdarstellung an *(1 Punkt)*.

c) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes Q *(3 Punkte)*.

d) Ermitteln Sie den Einfallswinkel φ zwischen dem Lichtstrahl und einem Normalenvektor des Spiegels ABC auf drei Nachkommastellen genau *(2 Punkte)*.

e) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P vom Spiegel ABC auf drei Nachkommastellen genau *(2 Punkte)*.

Aufgabe 6 (StD. Müller)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 + 6 \cdot x^2 - 15 \cdot x \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen *(2 Punkte)*.

b) Bestimmen Sie alle Extrempunkte *(3 Punkte)*.

c) Bestimmen Sie alle Wendepunkte *(2 Punkte)*.

d) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Funktion und der x-Achse im Intervall $x \in [-3; 1]$ eingeschlossen wird, auf drei Nachkommastellen genau *(3 Punkte)*.